TRACE MATRIKS SEGITIGA 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains Pada
Program Studi Matematika

Oleh :

MAULIDYA ZAWARNI
11554202698

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS SEGITIGA 4 × 4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Oleh:

MAULIDYA ZAWARNI
11554202698

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, 20 Desember 2019

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19770913 200604 2 002**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS SEGITIGA 4 × 4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Oleh:

MAULIDYA ZAWARNI
11554202698

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 20 Desember 2019

Pekanbaru, 20 Desember 2019
Mengesahkan

Dekan	Ketua Jurusan
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Ari Pani Desvina, M.Sc.**
Sekretaris	**: Fitri Aryani, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Rahmawati, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 20 Desember 2019
Yang membuat pernyataan,

MAULIDYA ZAWARNI
11554202698

PERSEMBAHAN

Tiada tempat yang pantas mengadu kecuali pada-Mu,
Tiada tempat yang layak untuk meminta kecuali pada-Mu,
Kini ku bersyukur ya Allah atas ketulusan yang kau berikan padaku.
Untuk Raslullah SAW terima kasih atas tauladanmu

Motivasi hidupku
"Allah tidak akan merubah nasib suatu kaum kecuali ia mau merubahnya sendiri"(*Al-Qur'an*)

"Barang siapa ia keluar untuk mencari ilmu, maka ia akan berada di jalan Allah Sampai ia kembali" (*HR.Tirmidzi*)

Karya kecil ini ku persembahkan untuk:
Ayahku Nazarman dan Ibuku Siwarni
"Ayah, ibu...terimakasih atas segala yang diberikan baik itu secara moril maupun materi,serta do'a mu yang senantiasa mengiringi setiap langkah dan hembus nafasku, ketulusanmu mencintaiku, keikhlasan nasihatmu menjagaku. Kini telah tiba saatnya aku mulai berjuang untuk mengukir kebahagian, melukiskan kisah indah di hari tua mu".

Untuk Amru Hadis (Adik)) dan Aisyah Ayudia Inara (Adik)
"Terimakasih atas motivasi dan do'a dari kalian semua, sehingga aku dapat melalui semua proses dengan semangat dan semoga ini menjadi langkah awal dari kebahagiaan Ayah dan Ibu kita….Aamiin".

Untuk pembimbing ku (Fitri Aryani, M.Sc)
"Terimakasih karena telah meluangkan waktunya dan sabar dalam membimbing atas kelalaian dan kekurangan, dan juga telah banyak memberikan masukan dan motivasi untuk penyelesaian tugas akhir ini".

Untuk semua Dosen Prodi Matematika FST
"Terimakasih untuk semua ilmu-ilmu yang diajarkan selama saya duduk di bangku kuliah dan nasehat serta motivasinya".

Buat sahabat-sahabat ku Annisa, Yayuk, Sulemi, Vina, Nopri
"4 tahun ini sangat banyak kutemukan arti persahabatan itu. Banyak hal yang telah kita lakukan bersama dan hal itu tak akan pernah aku lupakan. Terimakasih karena selalu ada di dalam suka dan duka. Thanks for your's support. Semoga kesuksesan menyertai kita semua. Aamiin.

TRACE MATRIKS SEGITIGA 4×4 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

MAULIDYA ZAWARNI
NIM : 11554202698

Tanggal Sidang : 20 Desember 2019
Periode Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Menghitung *trace* matriks yang berpangkat adalah matriks harus dipangkatkan terlebih dahulu sebanyak n kali. Tugas akhir ini membahas *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks segitiga yang dibahas adalah matriks segitiga atas (A_4) dan matriks segitiga bawah (B_4). Langkah-langkah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks tersebut adalah Pertama kali menentukan bentuk matriks A_4^{2} sampai A_4^{10} dan B_4^{2} sampai B_4^{10}. Selanjutnya, menduga bentuk umum A_4^{n} dan B_4^{n} dan membuktikannya menggunakan induksi matematika. Dan terakhir, menentukan bentuk umum $tr\left(A_4^{n}\right)$ dan $tr\left(B_4^{n}\right)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Selanjutnya didapat bentuk umum *trace* matriks segitiga atas sama dengan *trace* matriks segitiga bawah.

Katakunci: *induksi matematika, matriks segitiga, perpangkatan matriks, trace matriks*

TRACE OF TRIAGULAR MATRIX 4×4 THE POSITIVE INTEGERS RANK

MAULIDYA ZAWARNI
NIM : 11554202698

Date of Final Exam : *20 December 2019*
Date of Graduation Ceremony : *2020*

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
*HR. Soebrantas street No.*155 *Pekanbaru*

ABSTRACT

Calculating rank matrix is the matrix must be raised first. This final project discusses the triangular matrix 4×4 *trace of positive integers. The triangular matrices discussed are the upper triangular matrix* (A_4) *and the lower triangular matrix* (B_4)*. The steps to get the general shape of the trace matrix are First determine the shape of the matrix* $A_4{}^2$ *until* $A_4{}^{10}$ *and* $B_4{}^2$ *until* $B_4{}^{10}$*. Next, guess the general form* $A_4{}^n$ *and* $B_4{}^n$ *and prove it using mathematical induction. And finally, determine the general form* $tr(A_4{}^n)$ *and* $tr(B_4{}^n)$ *prove it with direct proof. Furthermore, the general form of the upper triangular matrix trace is the same as the lower triangular matrix trace.*

Keywords*: mathematical induction, matrix elevation,triangle matrix, trace matrix*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Alhamdulillahi Rabbil 'Alamin penulis ucapkan sebagai rasa syukur kepada Allah SWT atas segala karunia, rahmat, dan ilmu-Nya yang tak terhingga, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini. Sholawat serta salam terucap buat junjungan alam Nabi besar Muhammad SAW *Allahumma Sholli'ala Sayyidina Muhammad Wa'ala Ali Sayyidina Muhammad*, karena jasa beliau yang telah membawa manusia merasakan nikmatnya Islam seperti sekarang ini.

Tidak lupa penulis sampaikan terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu penulis, yang selalu memberikan semangat dan motivasinya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas akhir ini. Pada kesempatan ini juga penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. KH. Ahmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc, selaku Pembimbing Akademik dan Pembimbing Tugas Akhir yang telah banyak meluangkan waktu, memberikan motivasi, dan masukan terhadap penulis, serta memberikan arahan dan bimbingan yang sangat berharga dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
5. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si selaku Penguji I yang telah banyak memberikan kritik serta saran yang bermanfaat kepada penulis.
6. Ibu Rahmawati, M.Sc, selaku Penguji II yang telah banyak memberikan kritik serta saran yang bermanfaat kepada penulis.

7. Semua Dosen Jurusan Matematika yang telah memberi banyak ilmu, masukan, dukungan dan motivasi untuk penulis.
8. Orang tuaku tercinta Ayahanda Nazarman dan Ibunda Siwarni, terimakasih ku ucapkan atas perjuangan ayah dan ibu, atas do'a, motivasi, kasih sayang, bimbingan yang selalu mengalir. Serta selalu menguatkan semangat penulis. Semoga selalu dalam lindungan Allah SWT dan segala pengorbanan beliau mendapat ridho dari Allah SWT, Amiin.
9. Untuk adek-adekku Amru Hadis dan Aisyah Ayudia Inara yang selalu memberi nasehat agar penulis selalu berada dijalan Allah SWT, dan selalu memberi motivasi, dan semangat sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
10. Buat teman-teman angkatan 2015, terkhusus teman-teman Matematika Lokal D, dan yang terkhusus yaitu Annisa Rubbani Hasibuan, Sulemi, Yayuk Grafi Desi MR, Elvina Andiani dan Nopri andriani. Semoga kita selalu istiqamah dengan tujuan dan cita-cita kita.
11. Dan semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Akhir kata semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi kita semua pihak yang berkepentingan dan terutama bagi penulis sendiri serta bagi para pembaca semua.

Wassalamu'alaikumWr. Wb

Pekanbaru, 20 Desember 2019
Penulis

Maulidya Zawarni

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Sibarani pada tahun 2013, matriks adalah bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk empat persegi panjang. Penyusun bilangan-bilangan dalam bentuk empat persegi panjang biasanya secara horizontal dan vertikal.

Banyak operasi yang dapat dihitung dalam suatu matriks, seperti penjumlahan matriks, perkalian matriks, perpangkatan matriks, *trace* matriks dan sebagainya. Matriks mempunyai banyak jenis diantaranya matriks nol, matriks bujursangkar, matriks simetris dan matriks segitiga.

Matriks segitiga adalah matriks bujursangkar yang semua elemen di bawah atau di atas garis diagonal utama adalah nol. Matriks segitiga atas adalah matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonal utama adalah nol dan matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonal utama adalah nol.

Pada tahun 2015 Pahade dan Jha telah membahas mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif dan mendapatkan bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Penelitian tersebut menggunakan matriks real dengan bentuk sebagai berikut:

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Adapun Langkah yang harus dilakukan untuk menentukan *trace* matriks berpangkat, pertama mengalikan matriks tersebut sebanyak pangkatnya. Kedua menjumlahkan elemen pada diagonal utama yang didapat dari hasil perkalian matriks perpangkatan tersebut. Hal tersebutlah yang dilakukan oleh Pahade dan Jha pada penelitiannya tahun 2015. Dari penelitian tersebut mereka mendapatkan bentuk umum *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1.1) adalah sebagai berikut:

$$tr\left(A^n\right) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right]\left(\det(A)\right)^r \left(tr(A)\right)^{n-2r}, n \text{ genap}$$

$$tr\left(A^n\right)=\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(\det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r},n\ \text{ganjil}$$

Aryani dan Solihin (2017) juga telah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif dengan bentuk matriks yang sama dengan Pahade dan Jha pada Persamaan (1.1). Maka didapat bentuk umum *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif pada Persamaan (1.1) adalah sebagai berikut:

$$tr\left(A^{-n}\right)=\frac{tr\left(A^n\right)}{\left(\det(A)\right)^n}=\frac{\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(\det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r}}{\left(\det(A)\right)^n},n\ \text{genap}$$

$$tr\left(A^{-n}\right)=\frac{tr\left(A^n\right)}{\left(\det(A)\right)^n}=\frac{\sum_{r=0}^{n-1/2}\frac{(-1)^r}{r!}n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(\det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r}}{\left(\det(A)\right)^n},n\ \text{ganjil}$$

Pada tahun yang sama Fatonah (2017) membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif untuk n genap dan n ganjil. Matriks yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix},\forall a,b\in\mathbb{R} \tag{1.2}$$

Bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1.2) adalah sebagai berikut:

$$tr(A^n)=\begin{cases}0 & ,n\ \text{ganjil}\\ (-1)^{\frac{n}{2}}2\left(det(A)\right)^{\frac{n}{2}} & ,n\ \text{genap}\end{cases}$$

Aryani dan Yulianis pada tahun 2018 membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif dengan menggunakan matriks yang sama dengan Fatonah (2017) pada Persamaan (1.2), dengan A mempunyai invers maka bentuk umum A^{-n} untuk ganjil dan genap diperoleh:

$$A^{-n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} & ; n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix} & ; n \text{ genap} \end{cases}$$

dan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif pada Persamaan (1.2) adalah sebagai berikut:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & ; n \text{ ganjil} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} 2\big(det(A)\big)^{\frac{n}{2}} & ; n \text{ genap} \end{cases}$$

Pada tahun yang sama Andesta (2018) pada tugas akhirnya juga membahas mengenai *trace* matriks. Penelitian tersebut menggunakan matriks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad (1.3)$$

dan bentuk umum dari *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1.3) adalah sebagai berikut:

$$tr\left(A^n\right) = 1 + \left(a + b\right)^n$$

Berdasarkan latar belakang diatas, Penulis tertarik untuk melakukan kajian mengenai bentuk umum ***"Trace*** **Matriks Segitiga** 4×4 **Berpangkat Bilangan Bulat Positif*".***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, perumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah: "Bagaimana bentuk umum $trace$ matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif?'.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka harus dilakukan batasan masalah agar penelitian ini dapat tercapai dengan baik dan tepat. Pada penelitian ini hanya membahas mengenai matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah berbentuk sebagai berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum $trace$ matriks segitiga 4×4 pada Persamaan (1.4) dan Persamaan (1.5) berpangkat bilangan bulat positif.

1.5 Manfaat Penelitian

Berikut ini adalah beberapa manfaat dari penelitian ini:

1. Diharapkan dapat memberikan pengetahuan dalam bidang ilmu matematika.
2. Diharapkan dapat memberikan wawasan mengenai materi dalam mendapatkan bentuk umum *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif.
3. Diharapkan dapat dijadikan referensi bagi yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini mencakup beberapa bab, berikut penjelasan masing-masing bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II **LANDASAN TEORI**

Bab ini menjelaskan mengenai definisi matriks, matriks segitiga, operasi pada matriks, *trace* matriks, dan induksi matematika.

BAB III **METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini menjelaskan mengenai langkah-langkah dalam mendapatkan bentuk umum *trace* matriks segitiga 4×4 pada Persamaan (1.4) dan Persamaan (1.5) berpangkat bilangan bulat positif.

BAB IV **PEMBAHASAN**

Bab ini berisi uraian langkah-langkah dalam mendapatkan bentuk umum *trace* matriks segitiga 4×4 pada Persamaan (1.4) dan Persamaan (1.5) berpangkat bilangan bulat positif.

BAB V **PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan dari semua bab yang telah dijelaskan dan saran yang diberikan penulis atas penelitian yang telah dilakukan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan definisi matriks, matriks segitiga, operasi pada matriks, *trace* matriks, dan induksi matematika.

Berikut ini adalah Pembahasan mengenai definisi matriks dan jenis-jenis matriks.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Sibarani, 2013) Matriks adalah bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk empat persegi panjang. Penyusunan bilangan-bilangan dalam bentuk empat persegi panjang biasanya secara horizontal dan vertikal. Susunan bilangan-bilangan horizontal disebut baris dan susunan bilangan-bilangan vertikal disebut kolom dari matriks. Setiap bilangan yang disusun disebut elemen matriks.

Banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks disebut ukuran matriks. Semua bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk empat persegi panjang dibatasi oleh kurung $(\ )$ atau kurung siku $[\ ]$ dan matriks diberi nama dengan huruf besar A, B, C, D dan seterusnya. Suatu matriks A berukuran m baris dan n kolom disebut juga matriks $m \times n$. Bentuk umum dari matriks $m \times n$ adalah sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

atau $A_{m\times n} = \left(a_{i\times j}\right)_{m\times n}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Matriks mempunyai banyak jenis diantaranya adalah matriks nol, matriks bujursangkar, matriks simetris dan matriks segitiga. Berikut ini akan dijelaskan mengenai matriks segitiga.

Definisi 2.2 (Leon, 2001) Suatu matriks A berorde $n \times n$ disebut matriks segitiga atas *(upper triangular)* jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ dan dikatakan matriks segitiga bawah *(lower triangular)* jika $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$. A disebut juga matriks segitiga *(triangular)* jika A matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah.

Berikut bentuk umum matriks segitiga berukuran $n \times n$:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } B_n = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Keduanya adalah matriks segitiga. Matriks A adalah matriks segitiga atas dan matriks B adalah matriks segitiga bawah.

Banyak operasi yang dapat dihitung pada matriks diantaranya penjumlahan matriks, perkalian matriks, perpangkatan matriks dan *trace* matriks. Berikut ini akan dijelaskan mengenai operasi pada matriks.

2.2 Operasi pada Matriks

Definisi 2.3 (Lipschutz dan Lipson, 2006) Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [a_{ij}]$ adalah matriks dengan ukuran yang sama, misalkan matriks matriks $m \times n$. Jumlah A dan B, ditulis $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian dari A dan B, yaitu:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Hasilkali dari matriks A dengan suatu skalar k, ditulis $k.A$ atau hanya kA, adalah matriks yang diperoleh dengan cara mengalikan setiap elemen A dengan k,yaitu:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Contoh 2.1 Misalkan $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, tentukan $A+B$ dan $3A$

Penyelesaian:

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 7 & 5\end{bmatrix}$$

$$3A=3\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 12 & 3\end{bmatrix}$$

Berikut ini sifat-sifat dasar matriks dalam kaitannya dengan operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar.

Teorema 2.1 (Sibarani, 2013) Perhatikan sebarang matriks A, B, C dengan ukuran yang sama, maka berlaku sifat-sifat berikut:

(i) $A+B=B+A$ (Komutatif)

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (Asosiatif)

Teorema 2.2 (Sibarani, 2013) Untuk matriks A dan B dengan ukuran sama, maka berlaku sifat-sifat berikut:

(i) Untuk skalar $k \neq 0$, $k(A+B)=kA+kB$

(ii) Untuk skalar $k_1, k_2 \neq 0$, $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$

Selanjutnya, pembahasan mengenai perkalian pada matriks.

Definisi 2.4 (Lipschutz dan Lipson, 2006) Misalkan $A=[a_{ij}]$ dan $B=[a_{ij}]$ adalah matriks yang sedemikian rupa sehingga banyaknya kolom dari A sama dengan banyaknya baris dari B. Misalnya, A adalah matriks $m\times p$ dan B adalah matriks $p\times n$. Maka hasilkali AB adalah matriks $m\times n$ yang entri ij -nya diperoleh dengan cara mengalikan baris ke-i dari A dengan kolom ke-j dari B, yaitu:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ip} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mp}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \cdots & b_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}
\end{bmatrix}
\qquad (2.4)
$$

dengan $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Hasilkali AB tidak dapat didefinisikan jika A adalah matriks $m \times p$ dan B adalah matriks $q \times n$, dimana $p \neq q$.

Contoh 2.2 Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ Tentukan AB dan BA

Penyelesaian:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \text{ dan } BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks tidak bersifat komutatif, dengan kata lain hasilkali matriks AB dan hasilkali matriks BA tidak sama. Namun demikian, Perkalian pada matriks memenuhi sifat-sifat berikut ini.

Teorema 2.3 (Lipschutz dan Lipson, 2006) Misalkan A, B, C adalah matriks-matriks. Maka, perkalian dan penjumlahan matriks-matriks tersebut selalu didefinisikan sebagai berikut:

(i) $(AB)C = A(BC)$ (hukum asosiatif)

(ii) $A(B+C) = AB + AC$ (hukum distributif kiri)

(iii) $(B+C)A = BA + CA$ (hukum distributif kanan)

(iv) $k(AB) = (kA)B$ (dimana k adalah suatu skalar)

Selanjutnya, pembahasan mengenai perpangkatan pada matriks.

Definisi 2.5 (Lipschutz dan Lipson, 2006) Misalkan A adalah suatu matriks bujursangkar-n. Pangkat dari A didefinisikan $A^2 = AA, A^3 = A^2.A, \ldots, A^{n+1}.A = A^n.A$ dan $A^0 = I$.

Contoh 2.3 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, tentukan A^2

Penyelesaian:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 7 & 28 \end{bmatrix}$$

Selain operasi pada matriks yang telah dibahas sebelumnya, operasi yang dapat dihitung pada matriks adalah *trace* matriks. Berikut adalah penjelasan mengenai *trace* matriks.

2.3 *Trace* Matriks

Definisi 2.6 (Gentle, 2007) *Trace* matriks adalah jumlah elemen diagonal utama pada matriks bujursangkar. Jika matriks A adalah matriks bujursangkar ukuran $n \times n$, maka *trace* matriks A dinyatakan $tr(A)$. Jika diketahui matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka *trace* dari matriks A adalah

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

sehingga,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{jj}$$

dengan a_{ij} merupakan elemen baris ke-i dan kolom ke-j.

Teorema 2.4 (Gentle, 2007) Misalkan $A=\left[a_{ij}\right]$ dan $B=\left[a_{ij}\right]$ adalah matriks persegi berukuran $n\times n$, maka *trace* dari A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal A dan dinotasikan $tr\left(A\right)$, yaitu $tr\left(A\right)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$.

Maka berlaku sifat-sifat berikut:

(i) $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$

(ii) $tr\left(kA\right)=ktr\left(A\right)$

(iii) $tr\left(A^T\right)=tr\left(A\right)$

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$

Ambil sebarang matriks $A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan

$$B_n=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka,

$$tr\left(A_n+B_n\right)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr\left(A_n + B_n\right) = tr\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + a_{33} + b_{33} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$= \left(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}\right) + \left(b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn}\right)$$

$$= tr\left(A_n\right) + tr\left(B_n\right)$$

2. Akan dibuktikan $tr\left(kA\right) = ktr\left(A\right)$

Ambil sebarang matriks $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ dan skalar k ,

$$= tr\left(kA_n\right) = tr\left(k\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= ka_{11} + ka_{22} + ka_{33} + \cdots + ka_{nn}$$

$$= k\left(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}\right)$$

$$= ktr\left(A_n\right)$$

3. Akan dibuktikan bahwa $tr\left(A^T\right)=tr\left(A\right)$

Ambil sebarang matriks $A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ maka,

$$tr\left(A_n^{\ T}\right)=tr\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=tr\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\left(a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}\right)$$

$$=tr\left(A_n\right)$$

Contoh 2.4 Misalkan diberikan matriks bujursangkar $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan a) $tr\left(A+B\right)$, b) $tr\left(A^T\right)$ dan c) $tr\left(2A\right)$

Penyelesaian:

$tr(A)=2+4+(-3)=3$

$tr(B)=4+3+1=8$

$2tr(A)=2(3)=6$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 8 & 10 \\ 6 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

a) $tr(A+B) = 6+7-2 = 11$

b) $tr(A^T) = 2+4+(-3) = 3$

c) $tr(2A) = 4+8-6 = 6$

2.4 *Trace* Matriks Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pembahasan mengenai matriks telah dibahas oleh Fatonah (2017) yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks yang berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan positif, dimana entri-entri matriksnya bilangan real dan bilangan kompleks. Berikut adalah langkah-langkah penyelesaiannya untuk entri bilangan real:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$
2. Menentukan $\det(A)$ dan $tr(A)$, yaitu:

$$\det(A) = 0 - ab = -ab. \tag{2.5}$$

dan

$$tr(A) = 0 + 0. \tag{2.6}$$

3. Menentukan perpangkatan matriks A^2 sampai A^{12} sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$A^2 = A.A$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$A^3 = A^2.A$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$A^4 = A^3.A$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$A^5 = A^4.A$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$A^6 = A^5.A$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$A^7 = A^6.A$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$A^8 = A^7.A$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} a^4b^4 & 0 \\ 0 & a^4b^4 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$A^9 = A^8.A$$

$$A^9 = \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$A^{10} = A^9.A$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} a^5b^5 & 0 \\ 0 & a^5b^5 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$A^{11} = A^{10}.A$$

$$A^{11} = \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$A^{12} = A^{11}.A$$

$$A^{12}=\begin{bmatrix} a^6b^6 & 0 \\ 0 & a^6b^6 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

dengan melihat kembali Persamaan (2.5) sampai (2.18) maka dapat diduga bentuk umum A^n yaitu:

$$A^n=\begin{cases}\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.19}$$

4. Bentuk umum A^n dinyatakan dalam Teorema 2.5 sebagai berikut:

Teorema 2.5 Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a,b \in \mathbb{R}$, maka

$$A^n=\begin{cases}\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.20}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal $p(n): A^n=\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, untuk n ganjil

a) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu:

$$A^1=\begin{bmatrix} 0 & a^1b^0 \\ a^0b^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{bmatrix} 0 & a^1b^0 \\ a^0b^1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^1=A$$

b) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan untuk $p(k+2)$ juga benar.

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= A^k A^2 \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ab\left(a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \right) \\ ab\left(a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena langkah (1) dan (2) terbukti benar, maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$, untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$, untuk n genap, dibuktikan sebagai berikut:

a) Akan ditunjukkan $p(2)$ benar, yaitu:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^1b^1 & 0 \\ 0 & a^1b^1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{bmatrix} a^1b^1 & 0 \\ 0 & a^1b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A$$

b) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k) : A^k = \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $p(k+2)$ juga benar.

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= A^k A^2 \\ &= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} ab\left(a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}}\right) & 0 \\ 0 & ab\left(a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{k}{2}}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Karena langkah (1) dan (2) terbukti benar, maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ genap.}$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.5 terbukti.

5. Menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ dengan n ganjil dan n genap.

Teorema 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & , n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & , n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.21}$$

Bukti : Akan dibuktikan $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil.

Berdasarkan dari Teorema 2.6 maka dapat dibentuk $tr(A^n)$ untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

maka terbukti $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil.

Selanjutnya, akan dibuktikan $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan dari Teorema 2.6 maka dapat dibentuk $tr(A^n)$ untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$
$$= a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$
$$= (1+1) a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$
$$= 2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$$
$$= 2(ab)^{\frac{n}{2}}$$
$$= 2(-(-ab))^{\frac{n}{2}}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} tr(A^n) &= 2(-\det(A))^{\frac{n}{2}} \\ &= 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

maka terbukti $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap. Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.6 terbukti.

2.5 Induksi Matematika (Lipschutz dan Lipson, 2001)

Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ adalah menyatakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif n.

Langkah pertama dinamakan basis induksi, sedangkan langkah kedua dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan $p(n)$ benar. Dan akan dibuktikan bahwa $p(n+1)$ juga benar, asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n.

Contoh 2.5 p adalah proposisi jumlah n bilangan ganjil pertama adalah n^2. yaitu, $p(n): 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ (bilangan ganjil ke-n adalah $2n-1$, dan bilangan ganjil berikutnya adalah $2n+1$). Buktikan p berlaku untuk setiap bilangan bulat positif $n \in N$.

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu.

$$p(1): (2.1-1) = 1^2$$

$$(2-1)=1$$

$$1=1$$

maka, $p(1)$ benar.

2. Asumsikan untuk $p(k)$ benar, yaitu.

$p(k): 1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu.

$p(k+1): 1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)$

Akan dibuktikan:

$1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1) &= 1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1) \\
&= 1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) \\
&= \underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k^2}+(2k+1) \\
&= k^2+2k+1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

maka, $p(k+1)$ juga benar.

Karena langkah (1) dan (2) telah terbukti benar, maka p berlaku untuk setiap bilangan bulat positif $n \in N$.

BAB III

METODELOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian merupakan langkah-langkah yang digunakan penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks segitiga atas $A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ dan matriks segitiga bawah $B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
2. Menentukan bentuk matriks $A_4^{\,2}$ sampai $A_4^{\,10}$ dan $B_4^{\,2}$ sampai $B_4^{\,10}$.
3. Menduga bentuk umum matriks $A_4^{\,n}$ dan $B_4^{\,n}$ dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum $A_4^{\,n}$ dan $B_4^{\,n}$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Membuktikan bentuk umum $tr(A_4^{\,n})$ dan $tr(B_4^{\,n})$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan pembuktian langsung.
6. Mengaplikasikan bentuk umum $tr(A_4^{\,n})$ dan $tr(B_4^{\,n})$ dengan n bilangan bulat positif dalam bentuk contoh soal.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada Bab IV mengenai *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks segitiga atas $A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Maka diperoleh bentuk umum matriks A_4 berpangkat bilangan bulat positif adalah

$$A_4^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

2. Diberikan matriks segitiga bawah $B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Maka diperoleh bentuk umum matriks B_4 berpangkat bilangan bulat positif adalah

$$B_4^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \frac{(n-1)^3 - (n-1)}{6}a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

3. Bentuk umum *trace* matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah pada Persamaan (1.4) dan Persamaan (1.5) adalah

$$tr\left(A_4^{\,n}\right) = tr\left(B_4^{\,n}\right) = 4\left(a^n\right)$$

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini Penulis membahas *trace* matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat positif dengan entri bilangan real. Penulis menyarankan untuk mengembangkan penelitian ini dengan mencoba jenis matriks yang lain dengan entri bilangan rasional dan ordo matriks yang lebih besar seperti matriks 6×6, matriks 8×8 dan seterusnya.

DAFTAR PUSTAKA

Andesta, Rio. “Trace Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif”. *Skripsi*. UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2018.

Aryani, Fitri dan M, Solihin. “Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif”. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 3, N0. 2, Juli 2017.

Aryani, Fitri dan T, Fatonah. “Trace Matriks yang Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif”. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 1, N0. 1, Oktober 2017.

Aryani, Fitri dan Yulianis. “Trace Matriks Berbentuk khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif”. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 4, N0. 2, Juli 2018.

Gentle. “*Matrix Algebra”*, Springer, New York, 2007.

Leon, Steven J. *“Aljabar Linear dan Aplikasiny*a”, Edisi Kelima, Erlangga, 2001.

Lipschutz, Seymour dan Marc, Lipson. “*Matematika Diskrit”*. Penerbit Salemba Teknika: Jakarta. 2001.

Lipschutz, S., dan Marc, Lipson. *“Aljabar Linear”,* Edisi Ketiga, Erlangga, 2006.

Pahade , J dan Jha, M. “Trace of Positive Integer Power of Real 2 X 2 Matrices”, *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory, 5, 150-155, 2015.*

Sibarani, Maslen. *“Aljabar Linear”*, RajaGrafindo Persada, Jakarta, 2013.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 25 Juli 1997 di Pekanbaru. Anak pertama dari tiga bersaudara pasangan Bapak Nazarman dan Ibu Siwarni. Penulis menyelesaikan Pendidikan Formal pada Sekolah Dasar Negeri 031 Pandau Jaya pada Tahun 2008. Kemudian penulis Menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMPN 1 Siak Hulu Tahun 2011 dan menyelesaikan Pendidikan Sekolah Menegah Kejuruan dengan jurusan Teknik Arsitektur di SMKN 2 Pekanbaru pada tahun 2015. Setelah menyelesaikan jenjang pendidikan SMK pada Tahun 2015 penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Pekanbaru Riau dengan mengambil jurusan Matematika.

Pada awal bulan Januari Tahun 2018 penulis melaksanakan Kerja Praktek di PT. Panca Surya Garden Pekanbaru dengan judul **"Analisis Pengaruh Curah Hujan terhadap Produksi Kelapa Sawit di PT. Panca Surya Garden menggunakan Regresi Linear Sederhana"** yang dibimbing oleh Bapak Aprijon, S.Si, M.Ed pada Maret 2018 sampai dengan Mei 2018 dan diseminarkan pada bulan Juni 2018. Kemudian, pada awal Juli 2018 sampai akhir Agustus 2018 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Pelalawan Kecamatan Pangkalan Kuras Desa Betung.

Pada tanggal 20 Desember 2019 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir **"*Trace Matriks Segitiga* 4×4 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*"** di bawah bimbingan Ibu Fitri Aryani, M.Sc.